JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS 54, 161–176 (1983)

Intégrales oscillantes stochastiques: Estimation asymptotique de fonctionnelles caractéristiques

BERNARD GAVEAU

Université Pierre et Marie Curie, Mathématiques, tour 45–46, 4, Place Jussieu, Paris 75230, France

ET

JEAN-MARC MOULINIER

Institut Henri Poincaré, 11 Rue Pierre et Marie Curie, Paris 75230, France

Communicated by Paul Malliavin

Received May 1983

A general method for estimating $E(\exp(iN\Phi))$ for $N \to +\infty$ is given using a stationary phase method in Wiener space and stochastic variational calculus.

0. INTRODUCTION

En analyse de dimension finie, l'un des moyens les plus puissants pour obtenir des comportements asymptotiques d'intégrales de Fourier: $I_N = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(iN\Phi(x))\, a(x)\, dx$ consiste à appliquer la méthode du col ou de la phase stationnaire (voir [2]). En particulier lorsque Φ est réelle et sans points critiques on démontre que l'intégrale I_N est $0(N^{-k})$ pour tout k en utilisant des intégrations par parties répétées.

On se propose d'appliquer ce même raisonnement à des intégrales de Fourier sur l'espace de Wiener du type:

$$I_N = E\{A \exp(iN\Phi)\}$$

où Φ est une fonctionnelle de Kac ([3], [9]) ou une intégrale stochastique ou encore une fonctionnelle non markovienne.

L'analogue de d^2/dx^2 sera l'opérateur de Malliavin L [11] qui est auto-adjoint par rapport à la mesure de Wiener et celui de d/dx sera l'opérateur de dérivée stochastique D. La notion d'absence de points critiques sera remplacée par l'intégrabilité des puissances inverses de $\|D\Phi\|^2$. Des estimées voisines avaient été obtenues par voie directe dans le cas de symétries

0022-1236/83 $3.00

partielles [4], [5], [6]. Enfin récemment des estimées asymptotiques pour $t \to \infty$ de $E(\exp i\Phi(t))$ ont été obtenues lorsque $\Phi(t)$ est une intégrale stochastique prise jusqu'à t, en utilisant le calcul des variations stochastiques (Malliavin [13]). Le paragraphe 1 rappelle les notions de base du calcul de Malliavin, le principe de la méthode de la phase stationnaire est expliqué aux paragraphes 2 et 3 et appliqué à trois types de fonctionnelles ϕ dans les paragraphes 4, 5, 6.

Nous remercions M.J.-M. Bismut pour la démonstration du lemme 5.

1. Rappels sur les variations stochastiques dans l'espace de Wiener

(a) Ω désigne l'espace de Wiener des chemins browniens

$$\omega\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$$

issus de 0 à $s = 0$, muni de la mesure de Wiener μ usuelle, $b_s(\omega)$ est l'évaluation à l'instant s du chemin ω. On peut construire sur Ω un opérateur différentiel du second ordre, appelé *opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck*, que nous noterons L, *qui est auto-adjoint par rapport à* μ. Cet opérateur engendre un *processus de Markov* sur Ω appelé processus d'Ornstein-Uhlenbeck dont le temps sera noté désormais par une lettre grecque, les lettres latines étant les temps des $\omega \in \Omega$.

(b) Rappelons très brièvement les principales propriétés de L et du processus associé (voir P. Malliavin [11], Bismut [1], Stroock [15] et Shigekawa [14] pour une approche d'analyse fonctionnelle). Il suffit évidemment d'envisager les variations infinitésimales, pour $\tau \to 0^+$ du point $\omega \in \Omega$. En dimension finie, dans $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure gaussienne $(2\pi\alpha)^{-n/2} \exp(-x^2/2\alpha)\, dx$, le processus d'Ornstein-Uhlenbeck est défini par sa variation infinitésimale pendant le temps $\delta\tau$

$$x(\delta\tau, \omega') - x(0) = \sqrt{\alpha}\, \xi(\omega') \sqrt{\delta\tau} - \tfrac{1}{2} x(0)\, \delta\tau$$

$\sqrt{\delta\tau'}\, \xi(\omega')$ étant un bruit blanc d'espace de probabilité Ω'; alors L est

$$\frac{1}{2}\left(\alpha \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right).$$

Si f est fonction convenable, le calcul de Itô [10] donne

$$f(x(\delta\tau, \omega')) - f(x(0)) = \sqrt{\alpha} f'(x(0)).\, \xi(\omega') \sqrt{\delta\tau} + (Lf)(x(0))\, \delta\tau \quad (1)$$

et on en déduit que

$$\begin{aligned}(Lf)(x(0)) &= \lim_{\delta\tau\to 0} \frac{E'(f(x(\delta\tau,\omega')) - f(x(0)))}{\delta\tau} \\ \alpha\,\|\nabla f\|^2(x(0)) &= \lim_{\delta\tau\to 0} \frac{1}{\delta\tau} E'((f(x(\delta\tau,\omega')) \\ &\qquad - f(x(0)) - (Lf)(x(0))\,\delta\tau))^2\end{aligned} \tag{2}$$

E' notant l'espérance mathématique sur Ω'.

(c) En dimension infinie le raisonnement se généralise aussitôt ([11]) en considérant chaque $\omega \in \Omega$ comme formée de sommes de variables gaussiennes indépendantes de variance ds

$$b_s(\omega) = \int_0^s db_s(\omega)$$

et en faisant varier chaque $db_s(\omega)$ par un processus d'Ornstein-Uhlenbeck indépendant de $db_s(\omega)$ (donc construit sur un espace de probabilités Ω' indépendant de Ω), tous ces processus étant par ailleurs indépendants entre eux; ainsi nous construisons pour chaque ds une variable gaussienne $\xi(\sqrt{ds}, \omega')$ de variance ds, qui est donc un bruit blanc en s, indépendant de $b_s(\omega)$ et nous avons à la place de (1)

$$d_s b_s(\delta\tau, \omega, \omega') - d_s b_s(\omega) = \sqrt{\delta\tau}\,\xi(\sqrt{ds}, \omega') - \tfrac{1}{2} d_s b_s(\omega)\,\delta\tau$$

et en intégrant en s, on a

$$b_s(\delta\tau, \omega, \omega') - b_s(\omega) = \sqrt{\delta\tau}\,\xi_s(\omega') - \tfrac{1}{2} b_s(\omega)\,\delta\tau \tag{3}$$

où $\xi_s(\omega') = \int_0^s \xi(\sqrt{ds}, \omega')$ est un brownien indépendant de Ω.

(d) Si f est une fonctionnelle sur Ω, on définit comme dans (2)

$$\begin{aligned}(Lf)(\omega) &= \lim_{\delta\tau\to 0} \frac{1}{\delta\tau} E'(f(\omega + \sqrt{\delta\tau}\,\omega') - f(\omega)) \\ \|\nabla f\|^2(\omega) &= \lim_{\delta\tau\to 0} \frac{1}{\delta\tau} E'((f(\omega + \sqrt{\delta\tau}\,\omega') - f(\omega) - (Lf)(\omega)\,\delta\tau)^2)\end{aligned} \tag{4}$$

où E' est toujours l'espérance de Ω' et $\omega + \sqrt{\delta\tau}\,\omega'$ est une *notation symbolique* de la trajectoire $s \to b_s(\delta\tau, \omega, \omega')$ définie par (3). Si les limites (4) existent et sont intégrables *nous dirons que* f est de classe $C^1(\Omega)$. On définit la classe $C^k(\Omega)$ et la classe $C^\infty(\Omega)$[11] en disant que f est de classe $C^k(\Omega)$ si Lf et $\|\nabla f\|^2$ sont de classe $C^{k-1}(\Omega)$.

(e) Le calcul de Itô permet d'obtenir la formule suivante: soit $f_1 \dots f_n$, n fonctionnelles C^1 sur Ω, $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction C^2; on a alors

$$f_i(\omega + \sqrt{\delta\tau}, \omega') - f_i(\omega) = M_i(\sqrt{\delta\tau}, \omega', \omega) + (Lf)(\omega)\, \delta\tau \tag{5}$$

où $M_i(\sqrt{\delta\tau}, \omega, \omega')$ est, à ω fixé, une martingale en $\delta\tau$ sur Ω' dont le processus croissant est infinitésimalement $\|\nabla f_i\|^2(\omega)\, \delta\tau$. Notons $(\nabla f_i | \nabla f_j)(\omega)$ la forme bilinéaire polaire de la forme quadratique $\|\nabla f\|^2(\omega)$ (donc la dérivée du processus à variations bornées du produit des martingales $M_i(\sqrt{\delta\tau}, \omega, \omega')$. $M_j(\sqrt{\delta\tau}, \omega, \omega')$. Alors

$$\begin{aligned} &F(f_1(\omega + \sqrt{\delta\tau}\omega'),\dots,f_n(\omega + \sqrt{\delta\tau}\omega')) - F(f_1(\omega),\dots,f_n(\omega)) \\ &\quad = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} (f_1(\omega),\dots,f_n(\omega))\, M_i(\sqrt{\delta\tau}, \omega, \omega') \\ &\qquad + \delta\tau \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} (f_1(\omega),\dots,f_n(\omega))(Lf_i)(\omega) \right. \\ &\qquad \left. + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} (f_1(\omega)\dots f_n(\omega))(\nabla f_i | \nabla f_j)(\omega) \right] \\ &\qquad + o(\delta\tau) \end{aligned} \tag{6}$$

et donc nous obtenons:

$$L(F(f_1(\omega),\dots,f_n(\omega)) \textit{ est le coefficient de } \delta\tau \textit{ dans } (6). \tag{7}$$

(f) Tout ceci se généralise évidemment au cas du mouvement brownien n-dimensionnel $\vec{b}_s(\omega) = (b_1^1(\omega_1) \dots b_s^n(\omega_n))$ où $\omega = (\omega_1 \dots \omega_n) \in \Omega^n$, il suffit de faire varier indépendamment chaque composante par les variations stochastiques

$$\omega + \sqrt{\delta\tau}\omega' = (\omega_1 + \sqrt{\delta\tau}\, \omega'_1, \dots, \omega_n + \sqrt{\delta\tau}\, \omega'_n)$$

L est somme *d'opérateurs* L_j formellement identiques, chaque L_j agissant sur la variable ω_j; $\|\nabla f\|^2(\omega)$ est somme de n carrés de gradients relatifs aux variations partielles pour chaque ω_j, notés $\|\nabla_j\|^2(\omega)$.

2. Estimation de $E(e^{iN\Phi}A)$ et applications diverses.

(a) Supposons maintenant que $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ soit une fonctionnelle $C^1(\Omega)$ et calculons $F(N\Phi)$ où $F(x) = e^{ix}$, alors les formules du 1.(8) montrent que

$$L(e^{iN\Phi}) = e^{iN\Phi}(-\tfrac{1}{2}N^2 \|\nabla\Phi\|^2 + iN.L\Phi). \tag{8}$$

Par conséquent en utilisant le fait que L est auto-adjoint pour la mesure de Wiener, nous obtenons

$$\begin{aligned} E(e^{iN\Phi}A) &= E[L(e^{iN\Phi})A(-\tfrac{1}{2}N^2\|\nabla\Phi\|^2+iNL\Phi)^{-1}] \\ &= E[e^{iN\Phi}L(A(-\tfrac{1}{2}N^2\|\nabla\Phi\|^2+iNL\Phi)^{-1})] \end{aligned} \tag{9}$$

pourvu évidemment que A soit une fonctionnelle de carré intégrable, ainsi que $L(A(-\frac{1}{2}N^2\|\nabla\Phi\|^2+iNL\Phi)^{-1})$. Continuons le calcul précédent en appliquant à $f_1=A, f_2=-\frac{1}{2}N^2\|\nabla\Phi\|^2+iNL\Phi$, $F=x_1/x_2$; la formule (10) donne

$$\begin{aligned} L(A(-\tfrac{1}{2}N^2\|\nabla\Phi\|^2+iNL\Phi)^{-1}) &= (-\tfrac{1}{2}N^2\|\nabla\Phi\|^2+iNL\Phi)^{-1}L(A) \\ &\quad -A(-\tfrac{1}{2}N^2\|\nabla\Phi\|^2+iNL\Phi)^{-2}L(-\tfrac{1}{2}N^2\|\nabla\Phi\|^2+iNL\Phi) \\ &\quad +A(-\tfrac{1}{2}N^2\|\nabla\Phi\|^2+iNL\Phi)^{-3}\|\nabla(-\tfrac{1}{2}N^2\|\nabla\Phi\|^2+iNL\Phi)\|^2 \\ &\quad -(-\tfrac{1}{2}N^2\|\nabla\Phi\|^2+iNL\Phi)^{-2}(\nabla(-\tfrac{1}{2}N^2\|\nabla\Phi\|^1+iNL\Phi)|\nabla A). \end{aligned} \tag{10}$$

(b) *Nous voyons alors que sous les hypothèses suivantes*

(H1) A, $\|\nabla\Phi\|^2, L\Phi$ *sont des fonctionnelles de classe* C^1 *dont les* L *et carré de gradient stochastiques sont de classe* L^4.

(H2) $\|\nabla\Phi\|^{-2}$ *est de classe* L^6

alors

$$|E(e^{iN\Phi}A)|=0(N^{-2}) \text{ si } N\to+\infty. \tag{11}$$

En effet on utilise la formule (12) de sorte que

$$|E(e^{iN\Phi}A)|\leqslant E(|L(A(-\tfrac{1}{2}N^2\|\nabla\Phi\|^2+iNL\Phi)^{-1})|),$$

puis on utilise le calcul (13); on voit qu'on peut mettre N^{-2} en facteur; les hypothèses (H1) et (H2) permettent de conclure en appliquant l'inégalité de Hölder réitérée.

(c) Par ailleurs dans (12) nous aurions pu écrire

$$E(e^{iN\Phi}A)=E(e^{iN\Phi}A_1)N^{-2}$$

où on a posé

$$A_1=L(A(-\tfrac{1}{2}\|\nabla\Phi\|^2+i(L\Phi)N^{-1})^{-1}).$$

A partir de celà, on peut utiliser (11) et obtenir

$$E(e^{iN\Phi}A)=E(e^{iN\Phi}A_2)N^{-4}$$

où on a posé

$$A_2 = L(A_1(-\tfrac{1}{2}\|\nabla\Phi\|^2 + i(L\Phi)N^{-1})^{-1}) \text{ etc...} \tag{12}$$

et de proche en proche pour tout n

$$E(e^{iN\Phi}A) = E(e^{iN\Phi}A_n)N^{-2n} \tag{13}$$

où l'on passe de A_{n-1} à A_n par la transformation (12) (à condition bien entendu que l'on puisse l'appliquer à A_{n-1}).

Nous en concluons aussitôt:

LEMME 1. *Supposons que A, $\|\nabla\Phi\|^2$ et $L\Phi$ soient des fonctionnelles de classe $C^\infty(\Omega)$ dont les L et les carrés de gradients successifs soient $L^p(\Omega)$ pour tout $p < +\infty$. Supposons aussi que $\|\nabla\Phi\|^{-2}$ soit $L^p(\Omega)$ pour tout $p < +\infty$. Alors on a l'estimation*

$$|E(e^{iN\Phi}A)| = 0(N^{-n}) \text{ pour tout } n > 0. \tag{14}$$

(d) Les estimées de $E(e^{iN\Phi})$ serviront d'abord à démontrer des résultats de régularité sur les lois de Φ: en effet, on a facilement le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Soit Φ fonctionnelle réelle ou complexe sur Ω. Pour que la loi de Φ ait une densité C^∞ par rapport à la mesure de Lebesgue, il faut et il suffit que*

$$|E(e^{iN\Phi})| = 0(N^{-k}) \text{ pour tout } k > 0.$$

Preuve. Soit $\lambda(d\varphi)$ la loi de Φ; alors sa transformée de Fourier est $\hat{\lambda}(\xi) = E(e^{i\xi\Phi})$ et par suite on obtient le résultat annoncé par la formule d'inversion.

(e) Dans le cas où Φ est une intégrale stochastique d'un champ de vecteurs (voir partie 6), les estimées de $E(e^{iN\Phi}A)$ conduisent à des estimées globales de semigroupe de la chaleur associées à l'hamiltonien d'une particule quantique dans un champ électromagnétique (voir [6]). Les estimées du type du lemme 1 donnent alors des estimées de ce semi-groupe pour les temps grands et donc des estimées de valeur propre de ces hamiltoniens (voir [6] et [13]).

3. UNE MÉTHODE VARIATIONNELLE POUR MINORER $\|\nabla\Phi\|^2$

(a) Notons Ω_t l'espace de Wiener des chemins continus définis sur $[0, t]$ à valeurs $\mathbb{R}$ issus de 0 à $s = 0$, H_t^1 le sous-espace des chemins ayant une dérivée de carré intégrable muni de sa norme hilbertienne naturelle $\|h\|_{H_t^1}$ dont le produit scalaire est

$$(h \mid g)_{H_t^1} = \int_0^t h'(s)\, g'(s)\, ds. \tag{15}$$

L'injection naturelle $H_t^1 \to \Omega_t$ transforme la mesure gausienne cylindrique naturelle de H_t^1 en la mesure de Wiener μ_t sur Ω_t. De plus, il est bien connu que la translation par un élément h de H_t^1 dans Ω_t, disons τ_h, transforme μ_t en une mesure absolument continue par rapport à μ_t. Ainsi, si $\Phi: \Omega_t \to \mathbb{R}$ est une fonctionnelle définie μ_t-presque partout sur Ω_t, $\Phi(\cdot + h)$ est encore définie μ_t presque partout.

(b) Définissons maintenant $D\Phi$ comme dans Shigekawa [14]. Pour presque tout $\omega \in \Omega_t$, $(D\Phi)(\omega)$ sera un élément de H_t^1 (si il existe) tel que pour tout $h \in H_t^1$

$$|\Phi(\omega + h) - \Phi(\omega) - (D\Phi(\omega) \mid h)| = 0(\|h\|_{H_t^1}^2). \tag{16}$$

On peut donc alors définir naturellement $\|D\Phi(\omega)\|_{H_t^1}^2$ pour μ_t-presque tout ω. Admettons que cette variable aléatoire soit μ_t-intégrable; on a alors

LEMME 2. *$\|D\Phi\|_{H_t^1}^2$ coïncide μ_t-presque partout avec $\|\nabla\Phi\|^2$ définie directement par le calcul de variations stochastiques.*

Démonstration. La démonstration suit de très près le résultat de [14] ou aussi celui de [7] (page 233 à 235). Dans ce dernier cas, nous avions défini un calcul des variations stochastiques sur l'espace de probabilité du bruit blanc d'un espace de Hilbert abstrait $\mathscr{H}$; lorsque nous prenons $\mathscr{H} = H_t^1$, le bruit blanc de $\mathscr{H}$ n'est autre que le mouvement brownien usuel sur $[0, t]$ et l'espace Ω du bruit blanc n'est autre que Ω_t. Dans les notations de [7], p. 232, $e_n(s)$ devient alors $t/2\pi n \sin(2\pi ns/t)$ et nous avons démontré dans le contexte abstrait plus général que la dérivée stochastique de Skorohod ou de Shigekawa coïncide avec celle définie par Malliavin grâce au processus d'Ornstein-Uhlenbeck et nous avons également démontré implicitement le lemme 2 (précisément pour effectuer ces identifications).

(c) Nous déduisons alors immédiatement du lemme 2 le lemme 3 suivant:

LEMME 3. *Supposons que Φ soit une fonctionnelle $C^1(\Omega)$. Alors pour μ_t-presque partout $\omega \in \Omega_t$, on a*

$$\|\nabla\Phi(\omega)\|^2 = \sup_{\|h\|_{H_t^1} \leqslant 1} (D\Phi(\omega) \mid h)_{H_t^1}^2$$

En particulier, soit $E(\omega)$ une partie quelconque de la boule unité de H_t^1 (dépendant de ω). Alors on a, μ_t-presque partout,

$$\|\nabla\Phi(\omega)\|^2 \geqslant \sup_{h\in E(\omega)} (D\Phi(\omega)|h)^2_{H_t^1}. \tag{17}$$

C'est ce lemme 3 qui permettra d'obtenir des minorations convenables de $\|\nabla\Phi\|^2$ en choisissant convenablement pour chaque $\omega\in\Omega_t$, l'ensemble $E(\omega)$ dans H_t^1.

(d) Lorsque nous considérons le mouvement brownien à valeurs $\mathbb{R}^n$, nous devons prendre l'espace de Wiener Ω_t^n muni de la mesure produit et l'espace $(H_t^1)^n = H_t^1 \oplus \cdots \oplus H_t^1$ n fois muni du produit scalaire naturel

$$(h|g)_{(H_t^1)^n} = \sum_{i=1}^n \int_0^t h_i'(s)\, g_i'(s)\, ds$$

où $h=(h_i)_{i=1\ldots n}$, $g=(g_i)_{i=1\ldots n}$ les h_i et g_i désignant les composantes de h et g.

Le lemme 3 a encore lieu en changeant les produits scalaires et normes comme ci-dessus.

4. Exemple 1. Fonctionnelles de Kac

(a) Ici nous étudions le cas

$$\Phi(\omega) = \int_0^t W(\vec{b}_s(\omega))\, ds \tag{18}$$

où $t<+\infty$, $\vec{b}_s(\omega)$ est le mouvement brownien n dimensionnel usuel issu de 0 à $s=0$. Alors par linéarité de L

$$L\Phi(\omega) = \int_0^t L(W(\vec{b}_s(\omega)))\, ds. \tag{19}$$

Mais alors (8) (adapté au cas n-dimensionnel, compte tenu des remarques de la fin du paragraphe 1) donne

$$L(W(\vec{b}_s(\omega))) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 W}{\partial x_j^2}(\vec{b}_s(\omega))\,\|\nabla b_s^j\|^2 + \sum_{j=1}^n \frac{\partial W}{\partial x_j}(\vec{b}_s(\omega))\, L(b_s^j(\omega))$$

$$\|\nabla W(\vec{b}_s(\omega))\|^2 = \sum_{j=1}^n \frac{\partial W}{\partial x_j}(\vec{b}_s(\omega))^2\, \|\nabla b_s^j(\omega)\|^2. \tag{20}$$

Mais (3) donne aussitôt

$$L(b_s^j(\omega)) = -\frac{1}{2} b_s^{(j)}(\omega)$$

$$\|\nabla b_s^j(\omega)\|^2 = \lim_{\delta\tau \to 0} \frac{E'((\sqrt{\delta\tau}\, \xi_s^j(\omega')^2)}{\delta\tau} = s.$$

De plus

$$\|\nabla\Phi\|^2 = \lim_{\delta\tau \to 0} \frac{1}{\delta\tau} E' \left(\left(\int_0^t \sum_j \frac{\partial W}{\partial x_j} (\vec{b}_s(\omega))\, \xi_s^j(\omega')\, \sqrt{\delta\tau} ds)^2 \right) \right.$$

$$= \int_0^t \int_0^t \sum_{j=1}^n \frac{\partial W}{\partial x_j} (\vec{b}_s(\omega)) \frac{\partial W}{\partial x_j} (\vec{b}_u(\omega))(s \wedge u)\, ds\, du \tag{21}$$

puisque $E'(\xi_s^j(\omega')\xi_u^k(\omega')) = (s \wedge u)\, \delta^{jk}$.

(b) Pour pouvoir appliquer les résultats du paragraphe 2, il faut faire deux types d'hypothèses: celles sur *la régularité de Φ et ses dérivées fonctionnelles successives, celle sur l'intégrabilité des puissances inverses de* $\|\nabla\Phi\|^2$. Les hypothèses sur la régularité de Φ sont aisément satisfaites par: $(\mathscr{H}_1)$ *W est fonction C^∞ et ses dérivées sont à croissance au plus exponentielle.* De $(\mathscr{H}_1)$ il suit que Φ est C^∞ au sens de Malliavin et que ses L et carrés de gradients itérés sont L^p pour tout $p < +\infty$. Cela résulte de (21), (22), (23) et (24) et du fait que la loi de Gauss domine les exponentielles linéaires.

(c) Pour obtenir que $\|\nabla\Phi\|^{-2p}$ est intégrable pour tout $p < +\infty$ nous ferons l'hypothèse suivante:

$(\mathscr{H}_2)$ *$W(\vec{x}) = V(\vec{x}_0 + \vec{x})$ et $\vec{x}_0$ n'est pas un point critique de V.*

LEMME 4. *L'hypothèse $(\mathscr{H}_2)$ entraîne*

$$E(\|\nabla\Phi\|^{-2p}) < +\infty \qquad \textit{pour tout } p < +\infty.$$

Démonstration. Il existe une boule $B(\vec{x}_0, r)$ de centre $\vec{x}_0$ et rayon r où, disons, $\partial V/\partial x_1(\vec{x}) > \varepsilon > 0$.

Soit $T_1(\omega)$ le temps de sortie de cette boule, $T(\omega) = T_1(\omega) \wedge t$. Définissons $h_\omega(s) \in (H_t^1)^n$ par

$$h_\omega^j(s) \equiv 0 \qquad \text{si} \quad j = 2, 3, \ldots, n$$

$$h_\omega^1(0) = 0$$

$$\frac{dh^1_\omega(s)}{ds} = 1 \qquad \text{si} \quad s < \frac{T(\omega)}{2} \tag{22}$$

$$\frac{dh^1_\omega(s)}{ds} = -1 \qquad \text{si} \quad \frac{T(\omega)}{2} < s < T(\omega)$$

$$h^1_\omega(s) = 0 \qquad \text{si} \quad s \geqslant T(\omega).$$

Presque sûrement h n'est pas la fonction 0 car $T(\omega) > 0$. Utilisons alors le lemme 3 en choisissant pour ensemble $E(\omega)$ l'ensemble réduit à un élément $h_\omega/\|h_\omega\|_{H'_t}$; alors

$$\|\nabla \Phi(\omega)\|^2 \geqslant \frac{1}{\|h_\omega\|^2_{H'_t}} (D\Phi(\omega)\,|\,h_\omega)^2_{h'_t}$$

D'après (25), $\|h_\omega\|^2_{H'_t} = T(\omega)$. De plus la définition (21) de Φ et la définition (19) de $D\Phi(\omega)$ donnent

$$(D\Phi(\omega)\,|\,h_\omega)_{H'_t} = \int_0^T \frac{\partial V}{\partial x_1} (\vec{x}_0 + \vec{b}_s(\omega))\, h^1_\omega(s)\, ds$$

d'où

$$\|\nabla \Phi\|^2 \geqslant \frac{\varepsilon^2}{4} T^3$$

et

$$E(\|\nabla \Phi\|^{-2p}) \leqslant CE((T_1 \wedge t)^{-3p}) < +\infty$$

puisque les puissances inverses des temps de sortie de boule sont toujours intégrables (voir [10] par exemple).

(d) Nous déduisons alors des lemmes 1 et 4.

THÉORÈME 4. *Sous les hypothèses* $(\mathscr{H}_1)$ *et* $(\mathscr{H}_2)$, *si* A *est une fonctionnelle* C^∞ *sur* Ω_t *dont les dérivées successives sont* L^p *pour tout* $p < +\infty$, *on a pour tout* p, si $N \to +\infty$,

$$E\left(\exp\left(iN\int_0^t V(\vec{x}_0 + \vec{b}_s(\omega)\, ds\right) A(\omega)\right) = 0(N^{-p}) \tag{23}$$

5. Exemple 2. Fonctionnelles non markoviennes

(a) Nous prendrons ici le cas

$$\Phi(\omega) = \int_0^t \int_0^t W(\vec{b}_s - \vec{b}_{s'})\, ds\, ds'. \tag{24}$$

Ces fonctionnelles se rencontrent dans certains problèmes de mécanique statistique et il semble assez délicat d'estimer leurs lois par les méthodes usuelles car elles ne définissent pas un semi-groupe donc on ne peut pas réduire leur étude à un problème d'équations différentielles.

(b) Ici encore nous calculons

$$\begin{aligned} L(W(\vec{b}_s - \vec{b}_{s'}) &= \frac{1}{2}(s - s').\, \Delta W(\vec{b}_s - \vec{b}_{s'}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_i}(\vec{b}_s - \vec{b}_{s'}).\, (b_s^i - b_{s'}^i). \end{aligned} \tag{25}$$

Le calcul de $\|\nabla \Phi\|^2$ donne

$$\begin{aligned} \|\nabla \Phi\| = \int_0^t \int_0^t \int_0^t \int_0^t \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_i}(\vec{b}_s - \vec{b}_{s'}) \frac{\partial W}{\partial x_i}(\vec{b}_u - \vec{b}_{u'}) \\ \times mes([s, s'] \cap [u, u'])\, ds\, ds'\, du\, du' \end{aligned} \tag{26}$$

(où $mes([s, s'] \cap [u, u'])$ est la longueur de l'intervalle intersection $[s, s'] \cap [u, u']$).

(c) Sur W, nous ferons encore l'hypothèse $(\mathscr{H}_1)$ du paragraphe 4 et $(\mathscr{H}_2)$ sera remplacé par

$(\mathscr{H}'_2)$ *0 n'est pas un point critique de W.*

Dans ces conditions, on a l'analogue du théorème 1:

Théorème 2. *Sous les hypothèses $(\mathscr{H}_1)$ et $(\mathscr{H}'_2)$ et si A est C^∞, on a*

$$E\left(\exp\left(iN \int_0^t \int_0^t W(\vec{b}_s - \vec{b}_{s'})\, ds\, ds'\right) A(\omega)\right) = O(N^{-p})$$

pour tout $p < +\infty$, si $N \to +\infty$.

6. Exemple 3. Fonctionnelles de l'électromagnétisme

(a) Nous allons ici nous placer dans $\mathbb{R}^3$ et considérer

$$\Phi(\omega) = \int_0^t \vec{A}(\vec{b}_s(\omega)).d\vec{b}_s(\omega) \tag{27}$$

où $\vec{A}$ est un champ de vecteurs dont *les composantes satisferont* $(\mathscr{H}_1)$. Cette fonctionnelle intervient dans l'étude de l'hamiltonien d'une particule sans spin dans un champ électromagnétique, $\vec{A}$ étant alors le potentiel vecteur (voir [3], [6]). Il est alors à noter que c'est effectivement la quantité

$$K_N(0, \vec{x}_0 | t, \vec{x}_1) = E\left(\exp\left(iN\int_0^t A(\vec{b}_s(\omega))\right) d\vec{b}_s(\omega)\right) | \vec{b}_0(\omega) \\ = \vec{x}_0, \vec{b}_t(\omega) = \vec{x}_1\Big) \tag{28}$$

qui intervient dans l'étude de l'équation de la chaleur associée au champ électromagnétique $\vec{A}$ sous la condition que

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0 \text{ (jauge de Lorentz)} \tag{29}$$

ce que nous supposerons par la suite, N est une constante de couplage; $K_N(0, \vec{x}_0 | t, \vec{x}_1)$ est le propagateur "euclidien" (c'est-à-dire en temps imaginaire) d'une particule quantique dans le champ $\vec{A}$. Dans [13], P. Malliavin a obtenu une décroissance exponentielle de la norme L^∞ de ce noyau si $t \to +\infty$ sous l'hypothèse que la norme de $\vec{B} = \vec{rot}\ \vec{A}$ est uniformément minorée par une constante $c > 0$. Ici nous nous intéressons plutôt au comportement si $N \to +\infty$. Nous supposerons de plus $(\mathscr{H}_2'')$ *le champ magnétique* $\vec{B}(x_0)$ *est non nul en* x_0.

(b) Calculons maintenant le gradient de Φ défini par (30) en utilisant ici le lemme 2: nous avons

$$\langle D\phi, h\rangle = \sum_{j=1}^{3} \langle D\phi_j, h_j\rangle$$

$$\langle D\phi_j, h_j > = \int_0^t \sum_i \frac{\partial A_i}{\partial x_j}(b_s)\, h_j(s)\, db_i(s) + \int_0^t A_j(b(s))\, h_j'(s)\, ds.$$

Or écrivons la formule de Ito pour $A_j(b(s))\, h_j(s)$

$$A_j(b(t))\, h_i(t) = \int_0^t \frac{\partial A_j}{\partial x_i} h_j(s)\, db_i(s) + \int_0^t A_j(b(s))\, h_j'(s)\, ds \\ + \int_0^t \Delta A_j(b(s))\, h_j(s)\, ds.$$

$$\langle D\phi, h\rangle = \sum_i A_i(b(t))\, h_i(t) + \sum_{ij} \int_0^t \left\{ \frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \right\} (b(s))\, h_j(s)\, db_i(s) + \sum_i \int_0^t \Delta A_i(b(s))\, h_i(s)\, ds.$$

On a fait apparaitre $\vec{B} = rot\, A$. Or $h_i(s) = \int_0^t 1_{\{u<s\}} h_i'(u)\, du$

$$\langle D\phi, h\rangle = \sum_i \int_0^t ds\, h_i'(s) \left\{ \int_s^t (\vec{B}(b(u)) \Lambda d\vec{b}(u))_i + \int_s^t \Delta A_i(b(u))\, du + A_i(b(t)) \right\}$$

donc

$$\|D\Phi\|^2 = \int_0^t ds \left\| \int_s^t (\vec{B}(b(u)) \Lambda\, d\vec{b}(u)) + \int_s^t \Delta\vec{A}(b(u))\, du + \vec{A}(b(t)) \right\|^2 \tag{30}$$

(c) Il faut maintenant minorer cette expression. Comme dans [12], nommons *variance du processus continu $x(s)$ sur l'intervalle de temps* $[0, t]$ et notons $\sigma^2_{[0,t]}(x)$, la quantité

$$\sigma^2_{[0,t]}(x) = \int_0^t x^2(s)\, ds - \frac{1}{t} \left(\int_0^t x(s)\, ds \right)^2. \tag{31}$$

La variance satisfait les propriétés suivantes:

LEMME 5. (1) *$\sigma^2_{[0,t]}(x)$ est fonction croissante de t.*

(2) *Si b est le mouvement brownien issu de 0 à $t = 0$, alors*

$$P(\sigma^2_{0,t}(b) < \varepsilon^2) \leqslant C \exp\left(-\frac{t}{8\varepsilon} \right) \tag{32}$$

où C est constante indépendante de ε.

(3) *Si τ est le temps de sortie du brownien b d'une boule $B(0, R)$, alors*

$$P(\sigma^2_{[0,\tau]}(b) < \varepsilon^2) \leqslant C \exp\left(-\frac{C'}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \tag{33}$$

où C et C' sont des constantes indépendantes de ε.

Démonstration du Lemme 5. (1) Est évident en calculant la dérivée en t.

(2) Est démontré dans [11].

(3) Sa démonstration nous a été communiquée par J.-M. Bismut. On a

$$\begin{aligned} P(\sigma^2_{[0,t]}(b) < \varepsilon^2) &\leqslant P(\tau < \lambda) + P(\tau > \lambda, \sigma^2_{[0,\tau]}(b) < \varepsilon^2) \\ &\leqslant P(\tau < \lambda) + P(\sigma^2_{[0,\lambda]}(b) < \varepsilon^2) \\ &\leqslant C\left(\exp\left(-\frac{c'}{\lambda}\right) + \exp\left(-c''\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)\right). \end{aligned}$$

On choisit $\lambda = \varepsilon^{1/2}$ pour conclure.

(d) Nous disposons maintenant des éléments permettant de compléter la démonstration. Posons

$$x_i(s) = \int_0^s (\vec{B}(\vec{b}(u)) \wedge d\vec{b}(u))_i + \int_0^s \Delta A_i(\vec{b}(u))\, du \tag{34}$$

Alors par (33)

$$\|D\Phi\|^2 \geqslant \sum_{i=1}^{3} \sigma^2_{[0,\tau]}(x_i). \tag{35}$$

Comme $\vec{B}(x_0) \neq 0$ par $(\mathscr{H}'')$ une composante de $\vec{B}$, disons B_1 reste supérieure à ε dans une boule de centre 0 et de rayon r. Si τ est le temps de sortie de cette boule, la formule (38) et la première propriété du lemme 5 impliquent

$$\|D\Phi\|^2 \geqslant \sigma^2_{[0,\tau]}(x_2). \tag{36}$$

Regardons alors (37) pour $i = 2$; comme $\vec{A}$ est C^∞ et que l'on reste dans une boule finie, ΔA_2 est bornée dans l'intervalle d'intégration et B_1 est supérieur à ε; par une transformation de Girsanov comme dans [1] on se ramène à $\Delta A_2 \equiv 0$. Enfin, on remarque par [10] que l'intégrale stochastique restante de (37) est un brownien changé de temps. Comme il est clair que ces deux transformations respectent des inégalités du type (36), on déduit de (39) que

$$E(\|D\Phi\|^{-2p}) < +\infty.$$

Les hypothèses du lemme 1 étant réalisées, on en déduit:

THÉORÈME 3. *Sous les hypothèses* $(\mathscr{H}_1)$, $(\mathscr{H}_2'')$ *sur* $\vec{A}$, *si* Ψ *est une fonctionnelle* $C^\infty(\Omega)$, *alors*

$$E\left(\exp\left(iN\int_0^t \vec{A}(\vec{b}_s)\, d\vec{b}_s\right) \Psi \middle| \vec{b}_\omega(0) = \vec{x}_0\right) = 0(N^{-n})$$

pour tout $n > 0$ si $N \to +\infty$.

Remarque. On a parfois besoin d'avoir une estimée de

$$E_{b_0}^{b_1}\{\exp(iN\phi)\} = 0(N^{-k}) \text{ quand } N \to \infty \ \forall\, k \text{ entier}$$

où $E_{b_0}^{b_1}$ désigne l'espérance conditionnelle sachant que

$$b(0) = b_0 \text{ et } b(1) = b_1$$

Dans ce cas on se ramène à une espérance sur la boucle brownienne en posant $\beta(s) = b(s) - b_0 - s(b_1 - b_0)$

$$\beta(0) = \beta(1) = 0$$

la boucle brownienne β est en fait un élément d'un espace de Wiener abstrait construit autour de l'espace hilbertien

$$H = \mathscr{H}_{10} = \left\{ h \Big/ \int_0^1 h'(s)^2\, ds < \infty \text{ et } \int_0^1 h'(s)\, ds = 0, h(0) = 0 \right\}$$

Le calcul des variations étant fait dans un espace de Wiener abstrait le lemme 2 est toujours valable si on remplace $D\phi$ par $D_0\phi$ dérivée de ϕ le long de $\mathscr{H}_{10}$, $D_0\phi$ est la projection de $D\phi$ sur $\mathscr{H}_{10}$. Dans la partie 4 la fonction test h_ω utilisée appartient à $\mathscr{H}_{10}$ on a donc aussi une minoration de $\langle D_0\phi, D_0\phi\rangle$. Dans la partie 6 on remarque que:

$$\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}_{10} \oplus \{h_c \in \mathscr{H}_1 / h_c'(s) = \text{constante } s \in [0, 1]\}$$

$$\langle D_0\phi, D_0\phi\rangle = \langle D\phi, D\phi\rangle - \langle D\phi, h_c\rangle^2 \frac{1}{\langle h_c, h_c\rangle}$$

Reprenons les notations de la partie 6

$$\langle D_0\phi, D_0\phi\rangle = \sum_{i=1}^{3} \sigma^2_{[0,1)}(x_i)$$

on retrouve un résultat démontré par Malliavin [13]; le reste de la démonstration est ensuite sans changement.

References

1. J.-M. Bismut, Z. f. Wahrscheinlichkeit Theorie, **56** (1981), 469–505.
2. A. Erdelyi, Asymptotic expansion, Dover, 1965.
3. R. Feynman, Statistical Mechanics, Benjamin, 1976.
4. B. Gaveau, Acta Math., 1977, 139, 95–153.
5. B. Gaveau, C.R.A.S., 1981, Série I, 292, 577–580.
6. B. Gaveau et J. Vauthier, *J. Funct. Analysis*, **44**(1981), 388–400.

7. B. Gaveau et Ph. Trauber, *J. Funct. Analysis.*
8. N. Ikeda et S. Watanabe, S.D.E. and diffusion processus, North Holland, 1981.
9. M. Kac, Proc. 2nd Symposium Berkeley on Probability and Statistics, 1950.
10. H. McKean, Stochastic Integral, Acad. Press, 1969.
11. P. Malliavin, Stochastic Calculus of Variations and Hypoelliptic operators. Proc. of Int. Symp. on Stochastic differential equation, Kyoto, 1976, Tokyo, 1978.
12. P. Malliavin, C^k hypoellipticity with degeneracy in Stochastic Analysis, edited by A. Friedman and P. Pinsky, Acad. Press, 1978.
13. P. Malliavin, C.R.A.S., Juillet 1982, Série I.
14. I. Shigekawa, *J. Math. Kyoto Univ.*, 1980, 263–289.
15. D. Strook, *J. Funct. Anal.*, **44** (1981), 212–257.